第46卷第3期 数 学 进 展 Vol. 46, No. 3
2017年5月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) May, 2017

doi: 10.11845/sxjz.2015087b

广义 Wigner 方程 mild 解的局部存在唯一性及爆破准则

李 彬 *, 沈洁琼 **

(四川大学锦城学院数学教研室, 成都, 四川, 611731)

摘要: 本文研究了一类带 Hartree 型非线性的量子动力学模型, 即广义 Wigner 方程. 在 Hartree 核的 Fourier 逆变换可积条件下, 基于压缩映像原理和动力学方程的 Strichartz 估计, 得到了 n 维广义 Wigner 系统的 mild 解的局部存在唯一性. 进一步, 在 Wiener 代数下建立了局部 mild 解的爆破准则.

关键词: 广义 Wigner 方程; Hartree 型非线性; 压缩映像原理; Wiener 代数; 爆破准则

MR(2010) 主题分类: 35Q40; 47J35 / **中图分类号:** O175.29

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2017)03-0396-11

0 引言

本文关注一类无碰撞的广义 Wigner 系统, 其方程如下:

$$w_t + (v\cdot\nabla_x)w - \Theta_\hbar[V]w = 0, \quad V = K(x) *_x \rho(t,x), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

其中 K 表示 Hartree 核, $\hbar$ 为 Planck 常数, $\rho = \int_{\mathbb{R}^n_v} w(t,x,v)\mathrm{d}v$ 是粒子的密度函数. 未知函数 $w = w(t,x,v)$ 是在 t (≥ 0) 时刻位于 $x\in\mathbb{R}^n$ 且速度为 $v\in\mathbb{R}^n$ 的粒子的拟分布函数. 位势函数 V 通过拟微分算子 $\Theta_\hbar[V]w$ 作用于 $w(t,x,v)$, 通常定义如下 [14, 16−17]:

$$\begin{aligned}&\Theta_\hbar[V]w(t,x,v) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3\hbar}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\delta V(t,x,\eta)w(t,x,v')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(v-v')\eta}\mathrm{d}v'\mathrm{d}\eta,\\&\delta V(x,\eta) = V\left(x+\frac{\hbar\eta}{2}\right) - V\left(x-\frac{\hbar\eta}{2}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

首先考虑 Hartree 核为齐次核的情形, 也就是

$$K(x) = \frac{\lambda}{|x|^\alpha}, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,n). \tag{3}$$

事实上, 方程组 (1)–(3) 来源于和涵盖了下面的几类著名方程 (组):

(i) Hartree 系统:

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\hbar\psi_t(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi(t,x) + V(t,x)\psi(t,x), \quad x\in\mathbb{R}^n,\\&V(t,x) = \frac{\lambda}{|x|^\alpha} *_x \rho(t,x), \quad 0<\alpha<n.\end{aligned} \tag{4}$$

收稿日期: 2015-04-23. 修改稿收到日期: 2015-12-10.
E-mail: * endure2008@163.com; ** jieqiongshen123@163.com

事实上, 出现于量子物理学中的 Hartree 系统已被较多学者关注, 如 [9, 19] 等. 该模型描绘了复值的波函数 $\psi(t,x)$ 在 Hartree 型非线性 [12, 24] 影响下的时间演化过程. 波函数 $\psi(t,x)$ 的 Wigner 变换为

$$w(t,x,v)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi\Big(t,x-\frac{\hbar}{2}y\Big)\overline{\psi}\Big(t,x+\frac{\hbar}{2}y\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\cdot y}\mathrm{d}y, \tag{5}$$

其中 $\overline{\psi}$ 表示 ψ 的复共轭. 若将 Wigner 变换 (5) 作用于 Hartree 系统 (4), 通过计算可以得到 $w(t,x,v)$ 满足广义 Wigner 方程组 (1)–(3), 具体计算可参看 [18, 25].

(ii) Wigner-Poisson (WP) 方程: 显然地, 当 $n\geq 3$, $\alpha=n-2$ 时, (1)–(3) 则变成了经典 WP 方程. 近年来, 已有较多研究者从数学或物理学角度对 WP 方程进行了一些研究, 如: 全空间情况参看 [6, 13], 吸收边界、带周期边界、时间依赖的流入边界情况分别参看 [1, 3, 16–17]; 离散格的情况参看 [11, 23].

接下来仅从分析的角度回顾一下相关模型及方程的处理方法. 对于 WP 问题的研究, $L^2_{x,v}$ 空间是一个很自然的选择, 因为 WP 系统的质量是 $L^2_{x,v}$ 守恒的, 参看 [4, 18]. 然而, 如果没有进一步假设的话, 不能在此空间准确地定义密度函数 ρ. 因此, 加权的 L^2 空间

$$X=L^2(\Omega;(1+|v|^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}v),\quad \Omega\subset\mathbb{R}^6$$

被认为是克服上述困难的典型策略, 如 [16–17]. 事实上, 基于 $\delta V\in L^\infty$, $\Delta V=\rho$ 和 $\|V\|_{H^2}\leq\|\rho\|_{L^2}\leq C\|w\|_X$, 不难验证非线性项 $\Theta_\hbar[V]w$ 在 X 上是有界局部 Lipschitz 连续的.

1 主要结果

本文致力于研究方程组 (1)–(2) 在初值

$$w(0,x,v)=w_0(x,v) \tag{6}$$

下的数学性质. 更准确地说, 本文将建立广义 Wigner 系统 mild 解的局部存在唯一性以及局部 mild 解的爆破准则. 值得注意的是, 这里不能简单重复 [16–17] 的策略. 具体而言, 首先, 广义 Wigner 系统中位势差 δV 不再属于 L^∞; 其次, 对于广义 Wigner 系统中非线性项 $\Theta_\hbar[V]w$, 不能在 X 中得到类似于 [16–17] 中的先验估计, 因为 $\Delta_xV\neq\rho$. 因此, 对广义 Wigner 系统而言, 需要一些新的分析工具, 如在 Wiener 代数中分裂 Hartree 核等.

本文中 $L^a_x(L^b_v)$ 表示 Lebesgue 空间 $L^a_x(\mathbb{R}^n,L^b_v(\mathbb{R}^n))$, 并赋予范数

$$\|f\|_{L^a_x(L^b_v)}=\big\|\|f\|_{L^b_v(\mathbb{R}^n)}\big\|_{L^a_x(\mathbb{R}^n)}=\bigg[\int_{\mathbb{R}^n}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,v)|^b\mathrm{d}v\bigg)^{\frac{a}{b}}\mathrm{d}x\bigg]^{\frac{1}{a}}. \tag{7}$$

同时用 $L^r_{x,v}$ 表示 $L^r_x(L^r_v)=L^r_x(\mathbb{R}^n,L^r_v(\mathbb{R}^n))$, $L^a_v(L^b_x)$ 表示 $L^a_v(\mathbb{R}^n,L^b_x(\mathbb{R}^n))$. 受启发于 [2, 9, 15], 对于初值问题 (1)–(2) 和 (6), Wiener 代数是合适的. Wiener 代数也叫 Fourier 代数, 其定义如下:

$$W=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x):\mathcal{F}^{-1}[f]\in L^1(\mathbb{R}^n)\},$$

并赋予范数 $\|f\|_W=\|\mathcal{F}^{-1}[f]\|_{L^1}$, 其中 $\mathcal{F}^{-1}[f]$ 为 Fourier 逆变换, 其定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_\eta}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\eta}\mathrm{d}\eta.$$

用 $W(L^1)$ 表示 $W(\mathbb{R}^n_x, L^1(\mathbb{R}^n_v))$, 并赋予范数

$$\|f\|_{W(L^1)} = \big\|\|f(t,x,\cdot)\|_{L^1_v(\mathbb{R}^n)}\big\|_W = \big\|\mathcal{F}^{-1}_{x\to z}\left[\|f(t,x,\cdot)\|_{L^1_v(\mathbb{R}^n)}\right]\big\|_{L^1_z(\mathbb{R}^n)}. \tag{8}$$

本文的第一个结论可以被描述为如下定理.

定理 1.1 设 $0<\alpha<n$, 则对每个 $w_0\in L^1_{x,v}\cap W(L^1)$, 系统 (1)–(3) 和 (6) 存在唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^1_{x,v}\cap W(L^1))$. 进一步, 对于 mild 解的第一爆破时间 $t_{\max}<\infty$, $\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty$ 成立的充要条件是 $\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty$.

最后考虑几种其他情形的 Hartree 核, 也就是说, $K(x)$ 不再由 (3) 给定, 而是满足其 Fourier 逆变换在相应空间可积即可.

定理 1.2 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_B\in L^m$ $(1\le m\le\infty)$, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_{\mathbb{R}^n\setminus B}\in L^\infty$.

(i) 当 $m=1$ 和 $w_0\in L^1_{x,v}\cap W(L^1)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^1_{x,v}\cap W(L^1))$. 进一步, 对于 mild 解的第一爆破时间 $t_{\max}<\infty$, $\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty$ 成立的充要条件是 $\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty$.

(ii) 当 $m=\infty$ 和 $w_0\in L^p_{x,v}\cap W(L^1)$ $(1\le p\le\infty)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^p_{x,v}\cap W(L^1))$.

(iii) 当 $1<m<\infty$ 和 $w_0\in L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap W(L^1)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap W(L^1))$.

定理 1.3 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_B\in L^1$, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_{\mathbb{R}^n\setminus B}\in L^m$ $(1\le m\le\infty)$.

(i) 若 $m=1$, $w_0\in L^p_{x,v}\cap L^1_{x,v}$ $(1\le p\le\infty)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^p_{x,v}\cap L^1_{x,v})$.

(ii) 若 $m=\infty$, $w_0\in L^1_{x,v}\cap W(L^1)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^1_{x,v}\cap W(L^1))$.

(iii) 若 $1<m<\infty$, $w_0\in L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap L^1_{x,v}$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap L^1_{x,v})$.

定理 1.4 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_B\in L^\alpha$, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_{\mathbb{R}^n\setminus B}\in L^\beta$ $(1<\alpha,\beta<\infty)$. 若 $w_0\in L^p_{x,v}\cap L^1_v(L^\alpha_x)\cap L^1_v(L^\beta_x)$ $(1\le p\le\infty)$, 则系统 (1)–(2) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in C([0,t_{\max}), L^p_{x,v}\cap L^1_v(L^\alpha_x)\cap L^1_v(L^\beta_x))$.

注 1.1 事实上, 满足定理 1.2–1.4 中假设的 $K(x)$ 是存在的, 参看 [5, 12], 如所谓的 Yukawa 位势

$$K(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda|x|}}{|x|^{n-2}},\quad x\in\mathbb{R}^n,\ n\ge 3,\ \lambda>0.$$

具体而言, 其 Fourier 逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1}K=\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\lambda|x|}]*\mathcal{F}^{-1}[|x|^{2-n}]=\frac{c_1\lambda}{(\lambda^2+|\cdot|^2)^{\frac{n+1}{2}}}*\frac{c_2}{|\cdot|^2}.$$

显然 $\frac{c_1\lambda}{(\lambda^2+|\cdot|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\in L^1$. 因此, 由 Young 不等式得到

$$\|\mathcal{F}^{-1}K\|_{L^r}\le\left\|\frac{c_1\lambda}{(\lambda^2+|\cdot|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right\|_{L^1}\left\|\frac{c_2}{|\cdot|^2}\right\|_{L^r}\le C\left\|\frac{c_2}{|\cdot|^2}\right\|_{L^r}.$$

进一步能得到 $\mathcal{F}^{-1}K|_B \in L^{r_1}, \mathcal{F}^{-1}K|_{\mathbb{R}^n\setminus B} \in L^{r_2}$, 其中 $1 \le r_1 < \frac{n}{2} < r_2 \le \infty$.

注 1.2 基于定理 1.1–1.2 的证明策略, 易证定理 1.3–1.4. 因此本文将省略相关证明.

2 准备

当 $K(x)$ 满足 (3) 式时, 本文将在 Wiener 代数下建立相应非线性项 $\Theta_\hbar[V]w$ 的先验估计. 首先回忆一下 Wiener 代数的一些重要性质. 事实上, Wiener 代数 W 和 $W(L^1)$ 具有如下性质, 参看 [8, 10].

引理 2.1 W 和 $W(L^1)$ 都是Banach 空间. 同时, 对任意 $f, g \in W$, 有 $\|fg\|_W \le \|f\|_W\|g\|_W$.

接下来建立非线性项 $\Theta_\hbar[V]w$ 的一些先验估计. 注意到 $\Theta_\hbar[V]w$ 可以写成更紧凑的形式 [2, 7]

$$\Theta_\hbar[V]w = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V\mathcal{F}_{v\to\eta}[w]] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V] *_v w), \tag{9}$$

其中 $*_v$ 是关于 v 卷积符号. $\mathcal{F}_{v\to\eta}$ 是关于变量 v 的 Fourier 变换, $\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}$ 为其逆变换, 并分别定义如下:

$$\mathcal{F}_{v\to\eta}[f(x,\cdot)](\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v\cdot\eta}\mathrm{d}v, \quad \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[g(x,\cdot)](v) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_\eta} g(x,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\cdot\eta}\mathrm{d}\eta.$$

基于此, 建立如下技术引理.

引理 2.2 设 $K(x)$ 满足 (3) 式, 则存在 $C > 0$ 使得

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_{x,v}} \le C(\|w\|_{L^1_{x,v}} + \|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{L^1_{x,v}}, \tag{10}$$

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{W(L^1)} \le C(\|w\|_{L^1_{x,v}} + \|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{W(L^1)}. \tag{11}$$

证明 利用 (9) 式、Fourier 变换的性质、Young 不等式以及 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}
\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_{x,v}} &\le C\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V] *_v w\|_{L^1_{x,v}} \\
&\le C\left\|\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\|_{L^1_v}\|w\|_{L^1_v}\right\|_{L^1_x} \\
&\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\right\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|w\|_{L^1_{x,v}} \\
&\le C\left\|\mathrm{i}\Im(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x\cdot v}\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[V](2v))\right\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|w\|_{L^1_{x,v}} \\
&\le C\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[V](2v)\|_{L^1_v}\|w\|_{L^1_{x,v}} \\
&\le C\left\|\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}}\mathcal{F}^{-1}\rho(\cdot)\right\|_{L^1}\|w\|_{L^1_{x,v}},
\end{aligned}$$

其中 $\Im(z)$ 表示复数 $z = a + \mathrm{i}b$ 的虚部 $\mathrm{i}b$. 为了方便, 令 $k(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} = k_1 + k_2$, 其中 $k_1 = k(x)|_{|x|\le 1}$, $k_2 = k(x)|_{|x|>1}$. 故 $k_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 其中 $p \in [1, \frac{n}{n-\alpha})$; $k_2 \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 其中 $q \in (\frac{n}{n-\alpha}, +\infty]$. 进一步, 利用 Hölder 不等式得到

$$\|k_1\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1(B)} \le C\|k_1\|_{L^1(B)}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^\infty(B)} \le C\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球. 同样地, 对于 $\mathbb{R}^n \setminus B$ 有

$$\|k_2\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus B)} \le C\|k_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus B)}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C\|\rho\|_W \le C\|w\|_{W(L^1)}.$$

因此,

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_{x,v}} \le C(\|w\|_{L^1_{x,v}} + \|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{L^1_{x,v}}.$$

类似地有

$$\begin{aligned}\|\Theta_\hbar[V]w\|_{W(L^1)} &\le C\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V] *_v w\|_{W(L^1)}\\ &\le C\left\|\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\|_{L^1_v}\|w\|_{L^1_v}\right\|_W\\ &\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\right\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|w\|_{W(L^1)}\\ &\le C(\|w\|_{L^1_{x,v}} + \|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{W(L^1)}.\end{aligned}$$

□

3 定理 1.1 的证明

本节将利用不动点理论建立初值问题 (1)–(3) 和 (6) 的 mild 解的存在唯一性以及爆破准则. 为此, 令 $T>0$, 考虑如下 Banach 空间

$$Y_T = \{w \in C([0,T], L^1_{x,v} \cap W(L^1)),\ w(t=0) = w_0\}, \tag{12}$$

并赋予范数

$$\|w\|_{Y_T} = \sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^1_{x,v}} + \sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{W(L^1)}. \tag{13}$$

事实上, 初值问题 (1)–(3) 和 (6) 可以转化成如下积分方程:

$$w(t,x,v) = U(t)[w_0] + \int_0^t U(t-s)[(\Theta_\hbar[V]w)(s)]\mathrm{d}s, \quad \forall (x,v)\in\mathbb{R}^{2n}, \tag{14}$$

其中 $U(t)[f(x,v)] = f(x-tv,v)$, 具体参考 [20, 22]. 同时定义一个 Y_T 的有界闭子空间

$$Y_T^K = \{w \in Y_T : \|w\|_{Y_T} \le K,\ w(t=0) = w_0\}, \tag{15}$$

和映射 $\Psi : Y_T^K \mapsto Y_T$,

$$\Psi[w(t)] = U(t)[w_0] + \int_0^t U(t-s)[(\Theta_\hbar[V]w)(s)]\mathrm{d}s. \tag{16}$$

对于充分小的 T, 可以验证 Ψ 是 Y_T^K 上的严格压缩映射, 进一步得到 (14) 局部解的存在唯一性.

定理 1.1 的证明 首先注意到 Ψ 是适定的. 事实上, 由 [20, 22] 有

$$\|U(t)[w_0]\|_{L^\infty_t(L^1_{x,v})} \le \|w_0\|_{L^1_{x,v}}, \quad \left\|\int_0^t U(t-s)[\Theta_\hbar[V]w]\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_t(L^1_{x,v})} \le C\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_t(L^1_{x,v})},$$

其中

$$\|f\|_{L^r_t(L^p_{x,v})} = \begin{cases}\left[\displaystyle\int_0^T \|f(t,x,v)\|^r_{L^p_{x,v}}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{r}}, & 1\le r<\infty;\\ \sup_{t\in[0,T]}\|f(t,x,v)\|_{L^p_{x,v}}, & r=\infty.\end{cases}$$

另一方面, 根据积分方程 (16) 有 $\phi(x,t) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n_v}\Psi[w]\mathrm{d}v \le \phi^1(x,t) + \phi^2(x,t)$, 其中

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \int_{\mathbb{R}^n_v}|U(t)[w_0]|\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^n_v}|w_0(x-tv,v)|\mathrm{d}v,\\ \phi^2 &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n_v}|U(t-s)[(\Theta_\hbar[V]w)(s)]|\mathrm{d}v\mathrm{d}s = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n_v}|(\Theta_\hbar[V]w)(s,x-(t-s)v,v)|\mathrm{d}v\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 Fourier 变换的性质得到

$$\begin{aligned}\|\phi^1\|_W &\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}_{x\to z}\int_{\mathbb{R}^n_v}|w_0(x-tv,v)|\mathrm{d}v\right\|_{L^1_z}\\ &\le C\left\|\int_{\mathbb{R}^n_v}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tv\cdot z}|\mathcal{F}^{-1}_{x\to z}|w_0|\mathrm{d}v\right\|_{L^1_z}\\ &\le C\|w_0\|_{W(L^1)}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\|\phi^2\|_W &\le C\int_0^t\left\|\mathcal{F}^{-1}_{x\to z}\int_{\mathbb{R}^n_v}|(\Theta_\hbar[V]w)(s,x-(t-s)v,v)|\mathrm{d}v\right\|_{L^1_z}\mathrm{d}s\\ &\le C\int_0^t\left\|\int_{\mathbb{R}^n_v}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)v\cdot z}|\mathcal{F}^{-1}_{x\to z}|\Theta_\hbar[V]w|\mathrm{d}v\right\|_{L^1_z}\mathrm{d}s\\ &\le C\int_0^t\|w(s)\|_{W(L^1)}(\|w(s)\|_{L^1_{x,v}}+\|w(s)\|_{W(L^1)})\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\|\Psi[w]\|_{Y_T} &\le C_T\left(\|w_0\|_{Y_T}+\|w\|_{Y_T}\int_0^t\|w(s)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\mathrm{d}s\right)\\ &\le C_T\|w_0\|_{Y_T}+C_TK\int_0^t\|w(s)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

综上, 对于充分小的 T, Ψ 是映 Y_T^K 到自身的满射.

为了证明压缩性, 对 $w_1,w_2\in Y_T^K$ 还需要估计 $\|\Psi[w_1]-\Psi[w_2]\|_{Y_T}$. 由于

$$V[w_1-w_2]=\frac{\lambda}{|x|^\alpha}*_x(\rho_1-\rho_2),$$

$$\begin{aligned}\Psi[w_1]-\Psi[w_2] &= \int_0^t U(t-s)([\Theta_\hbar[V[w_1]]w_1]-[\Theta_\hbar[V[w_2]]w_2])(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t U(t-s)([\Theta_\hbar[V[w_1]](w_1-w_2)]+[\Theta_\hbar[V[w_1-w_2]]w_2])(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t U(t-s)[\Theta_\hbar[V[w_1]](w_1-w_2)]\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_t(L^1_{x,v})}\le C\|\Theta_\hbar[V[w_1]](w_1-w_2)\|_{L^1_t(L^1_{x,v})},\\ &\left\|\int_0^t U(t-s)[\Theta_\hbar[V[w_1-w_2]]w_2]\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_t(L^1_{x,v})}\le C\|\Theta_\hbar[V[w_1-w_2]]w_2\|_{L^1_t(L^1_{x,v})},\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\|\Psi[w_1]-\Psi[w_2]\|_{L^1_{x,v}} &\le C\int_0^t\big(\|\Theta_\hbar[V[w_1]](w_1-w_2)\|_{L^1_{x,v}}+\|\Theta_\hbar[V[w_1-w_2]]w_2\|_{L^1_{x,v}}\big)\mathrm{d}s\\ &\le CK\int_0^t\big(\|w_1-w_2\|_{L^1_{x,v}}+\|w_1-w_2\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\big)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\Psi[w_1]-\Psi[w_2]\|_{W(L^1)} &\le C\int_0^t \big(\|\Theta_\hbar[V[w_1]](w_1-w_2)\|_{W(L^1)}+\|\Theta_\hbar[V[w_1-w_2]]w_2\|_{W(L^1)}\big)\mathrm{d}s\\ &\le CK\int_0^t \big(\|w_1-w_2\|_{W(L^1)}+\|w_1-w_2\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\big)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

进一步,

$$\|\Psi[w_1]-\Psi[w_2]\|_{Y_T}\le 3CK\int_0^t \|w_1-w_2\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\mathrm{d}s\le 2CKT\|w_1-w_2\|_{Y_T}.$$

选取适当的 K 和 T, 可以得到 Ψ 的压缩性. 因此它有唯一的不动点 (也就是说, 对于充分小的 $T>0$, 积分方程 (14) 有唯一 mild 解且该解仅与 w_0 有关).

记 $t_{\max}$ 为 mild 解的最大存在时间. 由 [21], 初始值问题 (1)–(3) 和 (6) 有唯一 mild 解 $w\in L^1_{x,v}\cap W(L^1)$. 对于任意 $t<t_{\max}$, 该 mild 解也满足积分方程 (14). 进一步, 若 $t_{\max}<\infty$, 则有

$$\lim_{t\to t_{\max}}\|w\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty.$$

类似地有

$$\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\le C\|w_0\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}+C\int_0^t(\|w(s)\|_{L^1_{x,v}}+\|w(s)\|_{W(L^1)})\|w(s)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\mathrm{d}s.$$

另一方面, 由于 $\delta V(x,\eta)$ (见 (2) 式) 关于 η 是奇函数, 故 $\int_{\mathbb{R}^n}\Theta_\hbar[V]w\mathrm{d}v=0$. 因此有连续方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)=-\mathrm{div}_x j(t,x),$$

其中 $\rho(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}w(t,x,v)\mathrm{d}v$, $j(t,x)=\int_{\mathbb{R}_v}vw(t,x,v)\mathrm{d}v$ 分别为粒子密度和电流密度函数. 由 [2] 知 $\rho\ge 0$, 进一步, $\|\rho\|_{L^1}=\|\rho_0\|_{L^1}$, $\|w(t)\|_{L^1_{x,v}}\le\|w_0\|_{L^1_{x,v}}$. 因此, 由 Gronwall 不等式有

$$\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\le C\|w_0\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\exp\left(C\|w_0\|_{L^1_{x,v}}t+\int_0^t\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s\right).$$

若 $t_{\max}<\infty$, 且

$$\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty,$$

则有

$$\lim_{t\to t_{\max}}\exp\left(\int_0^t\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s\right)=\infty,$$

即有 $\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty$. 另一方面, 当 $t_{\max}<\infty$, 且

$$\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty,$$

若有

$$\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}<\infty,$$

则存在 $M>0$ 使得 $\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\le M$ 对任意的 $t\in[0,t_{\max}]$ 成立, 即

$$\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\|w(t)\|_{L^1_{x,v}}+\|w(t)\|_{W(L^1)}\le M,\quad \forall t\in[0,t_{\max}].$$

显然有 $\|w(t)\|_{W(L^1)}\le M$, $\forall t\in[0,t_{\max}]$. 因此

$$\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s\le Mt_{\max}<\infty,$$

这与 $\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty$ 矛盾. 故

$$\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty.$$

综上, 对于 mild 解的第一爆破时间 $t_{\max}<\infty$, $\lim_{t\to t_{\max}}\sup\|w(t)\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}=\infty$ 成立的充要条件是 $\int_0^{t_{\max}}\|w(s)\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s=\infty$. □

4 定理 1.2 的证明

首先, 对于更一般的核 $K(x)$, 需要建立相应非线性项 $\Theta_\hbar[V]w$ 的先验估计.

引理 4.1 设 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_B\in L^m$ $(1\le m\le\infty)$, $\mathcal{F}^{-1}K(\xi)|_{\mathbb{R}^n\setminus B}\in L^\infty$.

(i) 当 $m=1$, 则 $\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}\le C\|w\|^2_{L^1_{x,v}\cap W(L^1)}$.

(ii) 当 $m=\infty$, 则 $\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^p_{x,v}\cap W(L^1)}\le C\|w\|_{W(L^1)}\|w\|_{L^p_{x,v}\cap W(L^1)}$ $(1\le p\le\infty)$.

(iii) 当 $1<m<\infty$, 则

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap W(L^1)}\le C\|w\|_{L^m_x(L^1_v)\cap W(L^1)}\|w\|_{L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap W(L^1)}.$$

证明 类似于引理 2.2, (i) 成立. 对于 (ii), 令 $\mathcal{F}^{-1}K\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^p_{x,v}}\le C\|w\|_{W(L^1)}\|w\|_{L^p_{x,v}},\quad \|\Theta_\hbar[V]w\|_{W(L^1)}\le C\|w\|^2_{W(L^1)}. \tag{17}$$

事实上, 通过直接计算有

$$\begin{aligned}\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^p_{x,v}}&\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\right\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|w\|_{L^p_{x,v}}\\&\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}K\mathcal{F}^{-1}\rho(\,\cdot\,)\right\|_{L^1}\|w\|_{L^p_{x,v}}\\&\le C\|\mathcal{F}^{-1}K\|_{L^\infty}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1}\|w\|_{L^p_{x,v}}\\&\le C\|w\|_{W(L^1)}\|w\|_{L^p_{x,v}}.\end{aligned}$$

同样可以建立 $\Theta_\hbar[V]w$ 的 $W(L^1)$ 估计.

$$\begin{aligned}\|\Theta_\hbar[V]w\|_{W(L^1)}&\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to v}[\delta V]\right\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|w\|_{W(L^1)}\\&\le C\|\mathcal{F}^{-1}K\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1}\|w\|_{W(L^1)}\\&\le C\|\mathcal{F}^{-1}K\|_{L^\infty}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1}\|w\|_{W(L^1)}\\&\le\|w\|^2_{W(L^1)}.\end{aligned}$$

另一方面, 利用 Fourier 变换的性质能得到 (iii).

$$\begin{aligned}\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^m_{x,v}} &\le C\|\mathcal{F}^{-1}K\mathcal{F}^{-1}\rho(\,\cdot\,)\|_{L^1}\|w\|_{L^m_{x,v}}\\ &\le C\big(\|\mathcal{F}^{-1}K\|_{L^m(B)}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^{\frac{m}{m-1}}}+\|\mathcal{F}^{-1}K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus B)}\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1}\big)\|w\|_{L^m_{x,v}}\\ &\le C\big(\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^{\frac{m}{m-1}}}+\|\mathcal{F}^{-1}\rho\|_{L^1}\big)\|w\|_{L^m_{x,v}}\\ &\le C\big(\|\rho\|_{L^m}+\|\rho\|_W\big)\|w\|_{L^m_{x,v}},\end{aligned}$$

其中 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球. 同时由 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned}\|\rho\|_{L^m(\mathbb{R}^n)} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n_x}\left|\int_{\mathbb{R}^n_v} w(t,x,v)\mathrm{d}v\right|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n_v}\left(\int_{\mathbb{R}^n_x}|w(t,x,v)|^m\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}v\\ &= \|w\|_{L^1_v(L^m_x)}.\end{aligned}$$

进一步, 可以得到 $\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^m_{x,v}}\le C(\|w\|_{L^1_v(L^m_x)}+\|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{L^m_{x,v}}$. 类似地,

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{W(L^1)}\le C(\|w\|_{L^1_v(L^m_x)}+\|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{W(L^1)}.$$

最后, 由 [15] 有

$$\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_v(L^m_x)}\le C(\|w\|_{L^1_v(L^m_x)}+\|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{L^1_v(L^m_x)}. \qquad \square$$

定理 1.2 的证明 (i)–(ii) 的证明类似定理 1.1 的证明. 对于 (iii), 注意到 $\Psi: X_T^M\mapsto X_T$,

$$\Psi[w(t)]=U(t)[w_0]+\int_0^t U(t-s)[(\Theta_\hbar[V]w)(s)]\mathrm{d}s$$

是适定的, 其中

$$X_T=\{w\in C([0,T];L^m_{x,v}\cap L^1_v(L^m_x)\cap W(L^1)),\ w(t=0)=w_0\}$$

并赋予范数

$$\|w\|_{X_T}=\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^p_{x,v}}+\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^1_v(L^m_x)}+\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{W(L^1)}$$

和 $X_T^M=\{w\in X_T:\|w\|_{X_T}\le M,\ M>0\}$. 由 [20, 22] 得到

$$\|U(t)[w_0]\|_{L^\infty_t(L^m_{x,v})}\le\|w_0\|_{L^m_{x,v}},\quad \left\|\int_0^t U(t-s)[\Theta_\hbar[V]w]\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_t(L^m_{x,v})}\le C\|\Theta_\hbar[V]w\|_{L^1_t(L^m_{x,v})}.$$

利用 Wiener 代数的性质, 可以得到

$$\begin{aligned}\|w\|_{W(L^1)} &\le \left\|\mathcal{F}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n_v}|w_0(x-tv,v)|\mathrm{d}v\right\|_{L^1}+\int_0^t\left\|\mathcal{F}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n_v}|\Theta_\hbar[V]w(s,x-(t-s)v,v)|\mathrm{d}v\right\|_{L^1}\mathrm{d}s\\ &\le \|w_0\|_{W(L^1)}+C\int_0^t(\|w\|_{L^1_v(L^m_x)}+\|w\|_{W(L^1)})\|w\|_{W(L^1)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|U(t)[w_0]\|_{L_v^1(L_x^m)} &= \int_{\mathbb{R}_v^n}\left(\int_{\mathbb{R}_x^n}|w_0(x-tv,v)|^m\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}v\\ &= \int_{\mathbb{R}_v^n}\left(\int_{\mathbb{R}_x^n}|w_0(x,v)|^m\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}v\\ &= \|w_0\|_{L_v^1(L_x^m)}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\|U(t-s)[\Theta_\hbar[V]w](s)\|_{L_v^1(L_x^m)} &= \int_{\mathbb{R}_v^n}\left(\int_{\mathbb{R}_x^n}|\Theta_\hbar[V]w(s,x-(t-s)v,v)|^m\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}v\\ &= \int_{\mathbb{R}_v^n}\left(\int_{\mathbb{R}_x^n}|\Theta_\hbar[V]w(s,x,v)|^m\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}v\\ &\le C(\|w(s)\|_{L_v^1(L_x^m)}+\|w(s)\|_{W(L^1)})\|w(s)\|_{L_v^1(L_x^m)}.\end{aligned}$$

因此, 联立这些估计, 得到

$$\begin{aligned}&\|\Psi[w]\|_{L_{x,v}^m\cap L_v^1(L_x^m)\cap W(L^1)}\\ &\quad\le \|w_0\|_{L_{x,v}^m\cap L_v^1(L_x^m)\cap W(L^1)}+C\int_0^t\|w(s)\|_{L_x^m(L_v^1)\cap W(L^1)}\|w(s)\|_{L_{x,v}^m\cap L_v^1(L_x^m)\cap W(L^1)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

综上, 选择适当的 M 和 T, 类似定理 1.1 的证明策略可以证明 Ψ 是一个压缩映射, 因此它有唯一不动点. 进而结论得证. □

参考文献

[1] Arnold, A., On absorbing boundary conditions for quantum transport equations, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 1994, 28(7): 853-872.

[2] Arnold, A., López, J.L., Markowich, P.A. and Soler, J., An analysis of quantum Fokker-Planck models: a Wigner function approach, *Rev. Mat. Iberoam.*, 2004, 20(3): 771-814.

[3] Arnold, A. and Ringhofer, C., An operator splitting method for the Wigner-Poisson problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1996, 33(4): 1622-1643.

[4] Barletti, L., A mathematical introduction to the Wigner formulation of quantum mechanics, *Boll. Unione Mat. Ital.* (*8*), 2003, 6(3): 693-716.

[5] Berloff, N.G., Nonlocal nonlinear Schrödinger equations as models of superfluidity, *J. Low Temp. Phys.*, 1999, 116(5/6): 359-380.

[6] Brezzi, F. and Markowich, P.A., The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation, *Math. Methods Appl. Sci.*, 1991, 14(1): 35-61.

[7] Cañizo, J.A., López, J.L. and Nieto, J., Global L^1-theory and regularity for the 3D nonlinear Wigner-Poisson-Fokker-Planck system, *J. Differential Equations*, 2004, 198(2): 356-373.

[8] Carles, R., Dumas, E. and Sparber, C., Multiphase weakly nonlinear geometric optics for Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 2010, 42(1): 489-518.

[9] Carles, R. and Mouzaoui, L., On the Cauchy problem for the Hartree type equation in the Wiener algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2014, 142(7): 2469-2482.

[10] Colin, M. and Lannes, D., Short pulses approximations in dispersive media, *SIAM J. Math. Anal.*, 2009, 41(2): 708-732.

[11] Degond, P. and Markowich, P.A., A mathematical analysis of quantum transport in three-dimensional crystals, *Ann. Mat. Pura Appl.* (*4*), 1991, 160(1): 171-191.

[12] Giannoulis, J., Mielke, A. and Sparber, C., High-frequency averaging in semi-classical Hartree-type equations, *Asymptot. Anal.*, 2010, 70(1/2): 87-100.

[13] Illner, R., Existence, uniqueness and asymptotic behavior of Wigner-Poisson and Vlasov-Poisson systems: a survey, *Transport Theory Statist. Phys.*, 1997, 26(1/2): 195-207.

[14] Illner, R., Lange, H. and Zweifel, P., Global existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson systems, *Math. Methods Appl. Sci.*, 1994, 17(5): 349-376.

[15] López, J.L. and Nieto, J., Global solutions of the mean-field, very high temperature Caldeira-Leggett master equation, *Quart. Appl. Math.*, 2006, 64(1): 189-199.

[16] Manzini, C., On the three dimensional Wigner-Poisson problem with inflow boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 313(1): 184-196.

[17] Manzini, C. and Barletti, L., An analysis of the Wigner-Poisson problem with inflow boundary conditions, *Nonlinear Anal.*, 2005, 60(1): 77-100.

[18] Markowich, P.A. and Neunzert, H., On the equivalence of the Schrödinger and the quantum Liouville equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, 1989, 11(4): 459-469.

[19] Mouzaoui, L., High-frequency averaging in the semi-classical singular Hartree equation, *Asymptot. Anal.*, 2013, 84(3/4): 229-245.

[20] Ovcharov, E.Y., Strichartz estimates for the kinetic transport equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, 43(3): 1282-1310.

[21] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci., Vol. 44, Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[22] Salort, D., Dispersion and Strichartz estimates for the Liouville equation, *J. Differential Equations*, 2007, 233(2): 543-584.

[23] Steinrück, H., The Wigner Poisson problem in a crystal: existence, uniqueness, semiclassical limit in the one-dimensional case, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1992, 72(2): 93-102.

[24] Sulem, C. and Sulem, P.-L., The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-focusing and Wave Collapse, Appl. Math. Sci., Vol. 139, Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[25] Wigner, E., On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* (*2*), 1932, 40(5): 749-759.

Existence-uniqueness and Blow-up Criterion of the Local Mild Solution for the Generalized Wigner Equation

LI Bin, SHEN Jieqiong

(*Department of Mathematics, Jincheng College of Sichuan University, Chengdu, Sichuan, 611731, P. R. China*)

Abstract: This paper is concerned with the generalized Wigner system, which models the quantum mechanical (charged) particles-transport under the influence of a Hartree-type nonlinearity. Based on the contraction mapping principle and Strichartz estimates of the kinetic equation, the existence and uniqueness of the local mild solution in n dimensions are established for different Hartree kernels in the space of some integrable functions whose inverse Fourier transforms are integrable. We also establish a blow-up criterion for mild solutions in the Wiener algebra.

Keywords: generalized Wigner equation; Hartree-type nonlinearity; contraction mapping principle; Wiener algebra; blow-up criterion