doi: 10.11845/sxjz.2015103b

关于丢番图方程 $X^2-(a^2+1)Y^4=8-6a$

管训贵

(泰州学院, 泰州, 江苏, 225300)

摘要: 设 a 是正整数. 本文证明了: 当 $a=1$ 时, 方程 $X^2-(a^2+1)Y^4=8-6a$ 仅有正整数解 $(X,Y)=(2,1)$; 当 $a=2$ 时, 该方程仅有正整数解 $(X,Y)=(1,1)$; 当 $a=3$ 时, 该方程无正整数解 (X,Y); 当 $a=4$ 时, 该方程仅有 2 组互素的正整数解 $(X,Y)=(1,1)$ 和 $(103,5)$; 当 $a\geq 5$ 且 $6a+1$ 非平方数时, 该方程最多有 3 组互素的正整数解 (X,Y); 当 $a\geq 5$ 且 $6a+1$ 为平方数时, 该方程最多有 4 组互素的正整数解 (X,Y).

关键词: 四次方程; 虚二次域; 丢番图逼近; 解数; 上界

MR(2010) 主题分类: 11D61 / **中图分类号:** O156.7

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2017)03-0355-18

1 引言及主要结论

自 1942 年以来, Ljunggren, Luca, Walsh 和袁平之等人先后研究了方程

$$AX^2-BY^4=C, \tag{1}$$

并对 A,B 为正整数, $C\in\{\pm1,\pm2,\pm4\}$ 的情形确定了 (1) 的整数解的个数 (见 [1, 6–9, 11]). 但对于其他的 C, 要确定方程的整数解却十分困难.

2009 年, Stoll, Walsh 和袁平之 [10] 证明了: $A=1$, $B=2^{2m}+1$, $C=-2^{2m}$ 时, 方程 (1) 最多只有 3 组互素的正整数解 (X,Y).

2010 年, 袁平之和张中峰 [12] 证明了: $A=1$, $B=a^2+1$, $C=-2a$ 时, 方程 (1) 最多只有 3 组互素的正整数解 (X,Y).

2014 年, 袁平之和张中峰 [13] 证明了: $A=1$, $B=a^2+p^{2n}$, $C=-p^{2n}$ 时, 若 a,n 为正整数, p 为奇素数, $\gcd(a,p)=1$ 且使方程 $x^2-(a^2+p^{2n})y^2=-1$ 有一组整数解, 则方程 (1) 最多只有 2 组互素的正整数解 (X,Y); 以及 $A=1$, $B=a^2+4p^{2n}$, $C=-4p^{2n}$ 时, 若 a,n 为正整数, p 为素数, $\gcd(a,2p)=1$ 且使方程 $x^2-(a^2+4p^{2n})y^2=-1$ 有一组整数解和方程 $u^2-(a^2+4p^{2n})v^2=4$ 无互素的整数解, 则方程 (1) 最多只有 2 组互素的正整数解 (X,Y).

本文的主要结果是:

定理 方程

$$X^2-(a^2+1)Y^4=8-6a \tag{2}$$

收稿日期: 2015-05-16.

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11471144), 云南省教育厅科研课题 (No. 2014Y462), 泰州学院重点课题 (No. TZXY2014ZDKT007) 和泰州学院教博课题 (No. TZXY2016JBJJ001).

E-mail: tzszgxg@126.com

(i) 当 $a=1$ 时, 仅有正整数解 $(X,Y)=(2,1)$;

(ii) 当 $a=2$ 时, 仅有正整数解 $(X,Y)=(1,1)$;

(iii) 当 $a=3$ 时, 无正整数解 (X,Y);

(iv) 当 $a=4$ 时, 仅有 2 组互素的正整数解 $(X,Y)=(1,1)$ 和 $(103,5)$;

(v) 当 $a\geq 5$ 时, 若 $6a+1$ 非平方数, 则除开 $(X,Y)=(a-3,1)$ 外, 最多还有 2 组互素的正整数解 (X,Y); 若 $6a+1$ 为平方数, 则除开 $(X,Y)=(a-3,1)$ 和 $(6a^2+a+3,(6a+1)^{\frac{1}{2}})$ 外, 最多还有 2 组互素的正整数解 (X,Y).

2 超几何函数、代数数的有效逼近与若干引理

仍沿用文献 [12] 中的记法. 设 α,β,γ 为复数, 且 γ 不为 0 或负整数. 超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 定义为复变量 z 的幂级数, 即

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\frac{(\alpha+j)(\beta+j)}{\gamma+j}\right)\frac{z^i}{i!}.$$

由于其相邻两项系数之比为 $1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{j}+O(\frac{1}{j^2})$, 故收敛半径为 1.

令 r 为正整数, v 为实数且满足 $0<v<1$. 记

$$Y_r(z)=F(-r-v,-r,1-v,z),\quad X_r(z)=z^rY_r(z^{-1}),$$

以及

$$R_r(z)=\frac{\Gamma(r+1+v)}{r!\Gamma(v)}\int_1^z(1-t)^r(t-z)^rt^{-r-1+v}\mathrm{d}t.$$

这里积分路径不过 0, 并且当 $u=0$ 时, 有 $(1-u)^{-r-1+v}=1$.

用 $\triangle_{n,r}$ 表示 $X_r(z)$ 和 $Y_r(z)$ 的系数的最小公分母, $N_{n,r}$ 表示 $X_r(1-nz\prod_{p|n}p^{\frac{1}{p-1}})$ 和 $Y_r(1-nz\prod_{p|n}p^{\frac{1}{p-1}})$ 的系数分子的最大公因数. 若 A,B 为非零整数, D 为正整数, 满足

$$|A|>\sqrt{3D}|B|,\quad \mathrm{e}^{2.37}(\sqrt{A^2+B^2D}-|A|)<2,$$

记 $q=A+B\sqrt{D}\mathrm{i}$, $v=\frac{1}{4}$, $w=\frac{A-B\sqrt{D}\mathrm{i}}{A+B\sqrt{D}\mathrm{i}}$, 且

$$A_{4,r}=\frac{\triangle_{4,r}}{N_{4,r}}X_r(w)(4q)^r,\quad B_{4,r}=\frac{\triangle_{4,r}}{N_{4,r}}Y_r(w)(4q)^r,$$

则 $A_{4,r}$, $B_{4,r}$ 显然为域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的代数整数. 又令

$$\varepsilon_1=\sqrt{A^2+B^2D}+|A|,\quad \varepsilon_2=\sqrt{A^2+B^2D}-|A|,\quad w_1=2\mathrm{e}^{0.99}\varepsilon_1,\quad w_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2.37}\varepsilon_2,$$

且 C_1,f 为实数, 满足 $0<C_1<1.25$, 以及

$$f\geq\frac{|B\sqrt{D}|}{2C_1|A|}\frac{w_1-w_2}{w_1-1},\tag{3}$$

并假定 η,p,q 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的非零代数整数, 且使得 $\eta\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, 以及

$$\frac{|qB\sqrt{D}|}{2|A|}>C_1,\tag{4}$$

那么由 (3) 式和 (4) 式及 $\omega_2<1$ 得 $|qf|>\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2-1}>1$. 定义 r_0 为满足 $w_2^{1-r_0}\le|qf|<w_2^{-r_0}$ 的正整数. 于是我们有

引理 1 设 η,p,q 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 中的非零代数整数.

(i) 若 $\eta=\pm1$, $0<C_1<1.25$, $\lambda=|\frac{\log w_1}{\log w_2}|$, $C=0.9w_1(w_1-w_2)|f|^\lambda$, $f\ge\frac{|B\sqrt{D}|}{2C_1|A|}\frac{w_1-w_2}{w_1-1}$, 则

$$\left|\eta w^{\frac14}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1-w_2}{C|q|^{\lambda+1}};$$

(ii) 若 $r_0=1$ 且 $\eta^{-1}qB_{4,1}\ne pA_{4,1}$, $\eta=\pm1$, 则

$$\left|w^{\frac14}-\eta\frac{p}{q}\right|>\frac{1-0.8C_1}{0.9w_1|q|};$$

(iii) 若 $r_0=1$ 且 $\eta qB_{4,1}=pA_{4,1}$, $\eta\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, 则

$$\left|w^{\frac14}-\eta\frac{p}{q}\right|>\frac{1-w_2}{0.9w_1^2|q|}.$$

证明 参见文 [13, 引理 2.3]. □

引理 2 设 $D>0$ 且不是平方数, 则方程 $x^4-Dy^2=-1$ 最多有一组正整数解 (X,Y).

证明 参见文 [2, 第 7 章第 3 节定理 8 的推论]. □

引理 3 设 $D=2p$, p 为奇素数, 则方程 $x^4-Dy^2=1$ 除开 $p=3$, $x=7$, $y=20$ 外, 无其他的正整数解 (X,Y).

证明 参见文 [5, 第 4 章第 3 节定理 9]. □

引理 4 设 $D>0$ 且不是平方数,$\sqrt{D}=[a_0;a_1,a_2,\cdots]$ 是 $\sqrt{D}$ 的连分数展开式, $\frac{p_n}{q_n}=[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 与 $\xi_n=[a_n;a_{n+1},a_{n+2},\cdots]$ 分别表示 $\sqrt{D}$ 的第 n 个渐近分数与第 $n+1$ 个完全商, 则有

(i) $\xi_n=\frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n}$, 这里 P_n,Q_n 是满足 $P_n^2\equiv D\pmod{Q_n}$ 的整数;

(ii) 方程 $x^2-Dy^2=(-1)^nQ_n$ 有互素的正整数解 (x,y); 并且当 $l\ne(-1)^nQ_n$, $|l|<\sqrt{D}$ 时, 方程 $x^2-Dy^2=l$ 无互素的正整数解 (x,y);

(iii) $p_n^2-Dq_n^2=(-1)^nQ_{n+1}$, $p_np_{n+1}-Dq_nq_{n+1}=(-1)^{n+1}P_{n+2}$, $n\ge0$.

证明 参见文 [4]. □

引理 5 设 $\frac{p_m}{q_m}$ 是无理数 α 的连分数展开式的第 m 个渐近分数. 若 e 和 f 是互素的非零整数且存在正实数 c, 使得

$$\left|\alpha-\frac{e}{f}\right|<\frac{c}{f^2},$$

则 $(e,f)=(rp_{m+1}\pm sp_m,\ rq_{m+1}\pm sq_m)$, 这里 m 是某些非负整数, r,s 是正整数, 满足 $rs<2c$.

证明 参见文 [3]. □

引理 6 设 $a\ge4$ 为整数, 则方程

$$x^2-(a^2+1)y^2=8-6a \tag{5}$$

的所有互素的整数解由

$$x+y\sqrt{a^2+1}=\pm(\pm(a-3)+\sqrt{a^2+1})(a+\sqrt{a^2+1})^{2m} \tag{6}$$

给出, 这里 m 为整数, $\delta=a+\sqrt{a^2+1}$ 为 Pell 方程 $x^2-(a^2+1)y^2=-1$ 的基本解.

证明　设 (x,y) 为方程 (5) 的一组互素的正整数解, 则当 $a\geq 4$ 时, $x^2=(a^2+1)y^2-(6a-8)\geq(a^2+1)y^2-a^2\geq y^2$, 此时 $\sqrt{a^2+1}+\frac{x}{y}>a+1$. 由 (5) 式可得

$$\frac{6a-8}{y^2}=\left|\sqrt{a^2+1}+\frac{x}{y}\right|\cdot\left|\sqrt{a^2+1}-\frac{x}{y}\right|>(a+1)\left|\sqrt{a^2+1}-\frac{x}{y}\right|,$$

故

$$\left|\sqrt{a^2+1}-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^2}\cdot\frac{6a-8}{a+1}<\frac{6}{y^2}.$$

由于 $\sqrt{a^2+1}=[a,\overline{2a}]$, 所以 $P_0=0$, $Q_0=1$, $P_n=a$, $Q_n=1$, 这里 n 为正整数. 并且

$$p_n=\frac{1}{2}\big((a+\sqrt{a^2+1})^{n+1}+(a-\sqrt{a^2+1})^{n+1}\big),$$
$$q_n=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\big((a+\sqrt{a^2+1})^{n+1}-(a-\sqrt{a^2+1})^{n+1}\big).$$

令 $\alpha=\sqrt{a^2+1}$, $c=6$. 根据引理 5 知 $(x,y)=(rp_{n+1}\pm sp_n, rq_{n+1}\pm sq_n)$, 这里 n 是某些非负整数, r,s 是正整数满足 $rs<12$. 将此结果代入 (5) 式, 并由引理 4 (iii) 及 $P_n=a$, $Q_n=1$ 可得

$$8-6a=(rp_{n+1}\pm sp_n)^2-(a^2+1)(rq_{n+1}\pm sq_n)^2=(-1)^{n+1}(s^2-r^2\pm 2rsa). \tag{7}$$

1) 若 $n=2n_0$, 则 (7) 式成为

$$6a-8=s^2-r^2\pm 2rsa. \tag{8}$$

由 (8) 式知, s,r 同奇同偶, 故

$$(s,r)=(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(1,11),(2,2),(2,4),$$
$$(3,1),(3,3),(4,2),(5,1),(7,1),(9,1),(11,1).$$

当 $a\neq 4,5,6,7$ 时, 经验证知, $(s,r)=(1,3)$ 且取 "+" 号. 于是

$$\begin{aligned}x+y\sqrt{a^2+1}&=(3p_{2n_0+1}+p_{2n_0})+(3q_{2n_0+1}+q_{2n_0})\sqrt{a^2+1}\\&=3(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+2}+(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+1}\\&=(-a+3+\sqrt{a^2+1})(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+2}.\end{aligned}$$

当 $a=4$ 时, (8) 式成为

$$16=s^2-r^2\pm 8rs. \tag{9}$$

由 (9) 式并考虑 $rs<12$ 知, $(s,r)=(1,3),(1,5)$ 且取 "+" 号.

对于 $(s,r)=(1,3)$, 仿 $a\neq 4$ 的情形讨论可得

$$x+y\sqrt{17}=(-1+\sqrt{17})(4+\sqrt{17})^{2n_0+2}.$$

同样, 对于 $(s,r)=(1,5)$, 我们有

$$x+y\sqrt{17}=(1+\sqrt{17})(4+\sqrt{17})^{2n_0+2}.$$

类似地, 当 $a=5$ 时, $(s,r)=(1,3),(1,7)$ 且取 "+" 号. 此时

$$x+y\sqrt{26}=(\mp 2+\sqrt{26})(5+\sqrt{26})^{2n_0+2}.$$

当 $a=6$ 时, $(s,r)=(1,3),(1,9)$ 且取 "+" 号. 此时

$$x+y\sqrt{37}=(\mp 3+\sqrt{37})(6+\sqrt{37})^{2n_0+2}.$$

当 $a=7$ 时, $(s,r)=(1,3),(1,11)$ 且取 "+" 号. 此时

$$x+y\sqrt{50}=(\mp 4+\sqrt{50})(7+\sqrt{50})^{2n_0+2}.$$

2) 若 $n=2n_0+1$, 则 (7) 式成为

$$8-6a=s^2-r^2\pm 2rsa. \tag{10}$$

当 $a\neq 4,5,6,7$ 时, 仿 1) 的讨论知, $(s,r)=(3,1)$ 且取 "−" 号. 于是

$$\begin{aligned}x+y\sqrt{a^2+1}&=(p_{2n_0+2}-3p_{2n_0+1})+(q_{2n_0+2}-3q_{2n_0+1})\sqrt{a^2+1}\\&=(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+3}-3(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+2}\\&=(a-3+\sqrt{a^2+1})(a+\sqrt{a^2+1})^{2n_0+2}.\end{aligned}$$

当 $a=4$ 时, (10) 式成为

$$-16=s^2-r^2\pm 8rs. \tag{11}$$

由 (11) 式并考虑 $rs<12$ 知, $(s,r)=(3,1),(5,1)$ 且取 "−" 号.

对于 $(s,r)=(3,1)$, 仿 $a\neq 4$ 的情形讨论可得

$$x+y\sqrt{17}=(1+\sqrt{17})(4+\sqrt{17})^{2n_0+2}.$$

同样, 对于 $(s,r)=(5,1)$, 我们有

$$x+y\sqrt{17}=(-1+\sqrt{17})(4+\sqrt{17})^{2n_0+2}.$$

类似地, 当 $a=5$ 时, $(s,r)=(3,1),(7,1)$ 且取 "−" 号. 此时

$$x+y\sqrt{26}=(\pm 2+\sqrt{26})(5+\sqrt{26})^{2n_0+2}.$$

当 $a=6$ 时, $(s,r)=(3,1),(9,1)$ 且取 "−" 号. 此时

$$x+y\sqrt{37}=(\pm 3+\sqrt{37})(6+\sqrt{37})^{2n_0+2}.$$

当 $a=7$ 时, $(s,r)=(3,1),(11,1)$ 且取 "−" 号. 此时

$$x+y\sqrt{50}=(\pm 4+\sqrt{50})(7+\sqrt{50})^{2n_0+2}.$$

因此, $a\geq 4$ 时, 方程 (5) 的所有互素的整数解由 (6) 式给出. 引理 6 得证. □

引理 7 设 $D=a^2+1$, Q 为正偶数满足 $D-Q=l^2$ (l 为正整数). 若方程 $x^2-Dy^2=-Q$ 的所有互素的整数解 (x,y) 由

$$x+y\sqrt{D}=\pm(\pm l+\sqrt{D})(a+\sqrt{D})^{2m}$$

以及某些整数 m 给出, 并且 $(X,Y)\neq(l,1)$ 为方程

$$X^2-DY^4=-Q \tag{12}$$

的一组互素的正整数解, 则

$$\pm X\pm\sqrt{Q}\mathrm{i}=\frac{1}{4}(l+\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s\pm\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4,$$

这里

$$2Y=b_1r^2+b_2s^2,\quad b_1b_2=Q,\quad \gcd(b_1r^2,b_2s^2)=2,\quad \sqrt{b_1}r>\sqrt{b_2}s>0.$$

证明 记 $\delta=a+\sqrt{D}$, 对非负整数 s, 定义数列 $\{T_s\}$ 和 $\{U_s\}$:

$$\delta^s=T_s+U_s\sqrt{D}.$$

由 $DU_{2k}>lT_{2k}>l^2U_{2k}$ 知, 方程 (12) 满足 $(X,Y)\neq(l,1)$ 的互素的正整数解由

$$X=DU_{2k}\pm lT_{2k},\quad Y^2=T_{2k}\pm lU_{2k} \tag{13}$$

以及某些正整数 k 给出.

现在考虑 (13) 式中符号全为正的情形.

由 $T_{2k}=T_k^2+DU_k^2$ 及 $U_{2k}=2T_kU_k$ 知, (13) 式成为

$$Y^2=(T_k+lU_k)^2+QU_k^2. \tag{14}$$

再由 $(T_k+lU_k)(T_k-lU_k)=QU_k^2\pm 1$ 知, (14) 式中三项两两互素. 因此有正整数 b_1,b_2,r,s 满足

$$Y+(T_k+lU_k)=b_1r^2,\quad Y-(T_k+lU_k)=b_2s^2,\quad U_k=rs,$$

这里 $b_1b_2=Q$, $\gcd(b_1r^2,b_2s^2)=2$, $\sqrt{b_1}r>\sqrt{b_2}s>0$. 即

$$Y=\frac{1}{2}(b_1r^2+b_2s^2),\quad T_k=\frac{1}{2}(b_1r^2-b_2s^2-2lrs),\quad U_k=rs. \tag{15}$$

将 (15) 的后两式代入方程 $T_k^2-DU_k^2=\pm1$, 整理得

$$b_1^2r^4-4b_1lr^3s-6Qr^2s^2+4b_2lrs^3+b_2^2s^4=\pm4,$$

即

$$(l+\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s+\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4-(l-\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s-\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4=\pm8\sqrt{Q}\mathrm{i}.$$

令 Z 为整数, 使得

$$8Z=(l+\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s+\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4+(l-\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s-\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4,$$

则有

$$\begin{aligned}4Z&=l(b_1^2r^4+b_2^2s^4-6Qr^2s^2)+4Qrs(b_1r^2-b_2s^2)\\&=l((b_1r^2-b_2s^2)^2+4Qr^2s^2)+4Qrs(b_1r^2-b_2s^2-2lrs)\\&=l(4(T_k+lU_k)^2+4QU_k^2)+8QT_kU_k\\&=4l(T_k^2+DU_k^2)+8DT_kU_k=4X,\end{aligned}$$

故

$$X\pm\sqrt{Q}\mathrm{i}=\frac{1}{4}(l+\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s+\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4,$$

这里

$$b_1b_2=Q,\quad \gcd(b_1r^2,b_2s^2)=2,\quad \sqrt{b_1}r>\sqrt{b_2}s>0.$$

类似地, 对 (13) 式中符号全为负的情形有

$$-X\pm\sqrt{Q}\mathrm{i}=\frac{1}{4}(l+\sqrt{Q}\mathrm{i})(\sqrt{b_2}s-\sqrt{b_1}r\mathrm{i})^4.$$

引理 7 得证. □

引理 8 设 $a\geq4$, 若 $(X,Y)\neq(a-3,1)$ 为方程 (2) 的一组互素的正整数解, 则有正整数 x,y,g 使得 $g^2<6a-8$ 且

$$\pm X\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=\frac{1}{4g^2}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x\pm y\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4,\tag{16}$$

$$x^2+2(3a-4)y^2=2gY.\tag{17}$$

证明 令 $g=\min\{b_1,b_2\}$. 由 $\gcd(b_1,b_2)\,|\,2$, $b_1b_2=6a-8\geq16$ 知 $b_1\neq b_2$, 故 $g^2<6a-8$. 当 $g=b_1$ 时, 令 $x=b_1r$, $y=-s$; 当 $g=b_2$ 时, 令 $x=b_2s$, $y=r$. 于是由引理 7 可得

$$\begin{aligned}&\pm X\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=\frac{1}{4}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})\left(\frac{x\pm y\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{\sqrt{g}}\right)^4,\\&x^2+2(3a-4)y^2=2gY.\end{aligned}$$

即有 (16) 式成立, 且满足 (17) 式. 引理 8 得证. □

引理 9 若 K,l 是正整数, $\eta\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, $0<c_l<1$ 为常数, $c_{l+1}=(2-c_l)(\sqrt{2}-c_l)^2$. 若

$$0<\left|w^{\frac14}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|<c_l,$$

则

$$\left|w-\left(\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right)^4\right|>c_{l+1}\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|.$$

证明 由等式

$$\begin{aligned}\left|w-\left(\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right)^4\right|=&\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|\cdot\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}+2\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|\\&\cdot\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}+(1+\mathrm{i})\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|\\&\cdot\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}+(1-\mathrm{i})\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|\end{aligned}$$

可得

$$\left|w-\left(\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right)^4\right|>(2-c_l)(\sqrt{2}-c_l)^2\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta\frac{x+y\sqrt{K}\mathrm{i}}{x-y\sqrt{K}\mathrm{i}}\right|.$$

引理 9 得证. □

引理 10 设 $a\geq 4$, 若 (X_j,Y_j), $Y_j>1$ $(j=1,2,3)$ 为方程 (2) 的 3 组互素的正整数解, 则存在 $j_1,j_2\in\{1,2,3\}$ 使得

$$Y_{j_2}>\frac{4(a^2+1)}{(3a-4)g_1g_2}Y_{j_1}^3.$$

证明 因 $a\geq 4$, 故 $Y_j^2\geq T_2-(a-3)U_2=T_1^2+(a^2+1)U_1^2-2(a-3)T_1U_1=a^2+(a^2+1)-2a(a-3)=6a+1\geq 25$. 由引理 8 知, 存在正整数 x_j,y_j,g_j 使得 $g_j^2<6a-8$ $(j=1,2,3)$, 且

$$\begin{aligned}&\pm X_j\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=\frac{1}{4g_j^2}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j\pm y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4,\\&x_j^2+2(3a-4)y_j^2=2g_jY_j,\quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

我们只讨论以下情形:

$$\begin{aligned}&X_j\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=\frac{1}{4g_j^2}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4,\\&x_j^2+2(3a-4)y_j^2=2g_jY_j,\quad j=1,2,3,\end{aligned}\tag{18}$$

其他情形类似. 此时有

$$\begin{aligned}&(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4-(a-3-\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4\\&\quad=\pm 8g_j^2\sqrt{6a-8}\mathrm{i},\quad j=1,2,3.\end{aligned}\tag{19}$$

记 $w=\frac{a-3-\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则由 (19) 式可得

$$\left|w-\left(\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right)^4\right|=\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}Y_j^2}\leq\frac{8}{25\sqrt{17}}<0.078,\quad j=1,2,3.\tag{20}$$

令 $\eta_j\in\{\pm 1,\pm\mathrm{i}\}$ 满足

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|=\min_{0\leq k\leq 3}\left|w^{\frac{1}{4}}-\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|,\quad j=1,2,3.$$

现在证明

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<0.0223,\quad j=1,2,3.$$

首先有

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<(0.078)^{\frac{1}{4}}<0.5285,\quad j=1,2,3.$$

令 $c_1=0.5285$, 则由引理 9 以及 $(2-0.5285)(\sqrt{2}-0.5285)^2>1.15$, 可得

$$\left|w-\left(\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right)^4\right|>1.15\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|,\quad j=1,2,3.$$

结合 (20) 式有

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<\frac{0.078}{1.15}<0.068,\quad j=1,2,3.$$

重复上述过程可得

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<0.0223,\quad j=1,2,3.$$

因此

$$\begin{aligned}\left|w-\left(\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right)^4\right|&\geq(2-0.0223)(\sqrt{2}-0.0223)^2\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&>3.83\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|.\end{aligned}$$

结合 (20) 式中的等式得

$$\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_j\frac{x_j+y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_j-y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_j^2},\quad j=1,2,3.$$

由于 $\eta_j\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, 所以存在 $j_1,j_2\in\{1,2,3\}$ 使得 $\frac{\eta_{j_1}}{\eta_{j_2}}=\pm1$. 不失一般性, 我们假定 $j_1=1$, $j_2=2$ 及 $Y_2>Y_1$, 则有

$$\begin{aligned}&\left|\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&\quad\leq\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|+\left|w^{\frac{1}{4}}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&\quad<\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_1^2}+\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_2^2}.\end{aligned}\tag{21}$$

下面我们证明

$$\left|\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\geq\frac{2}{\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}.\tag{22}$$

由 $2\,|\,x_1$, $2\,|\,x_2$ 知, 存在整数 u,v, 使得

$$2u+2v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=(x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}).$$

于是

$$\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}=\frac{2(\eta_1-\eta_2)u-2(\eta_1+\eta_2)v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{(x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})}. \tag{23}$$

假定

$$\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}=\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}},$$

那么

$$\frac{(x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4}{4g_1^2Y_1^2}=\frac{(x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4}{4g_2^2Y_2^2}.$$

结合 (18) 式有

$$(X_1\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i})Y_2^2=(X_2\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i})Y_1^2. \tag{24}$$

比较 (24) 式两边的虚部可得 $Y_1=Y_2$. 这与 $Y_2>Y_1$ 相矛盾.

此外, 由 $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\pm1$ 知 $2\,|\,(\eta_1-\eta_2)u-(\eta_1+\eta_2)v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}$. 对 (23) 式两边取模可得 (22) 式成立.

由 (21)–(22) 式以及 $Y_2>Y_1\geq5$, 有

$$\frac{2}{\sqrt{g_1g_2Y_2}}<\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_1\sqrt{Y_1}}+\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_2\sqrt{Y_2}}.$$

结合 $Y_2\geq6$, $g_1g_2<6a-8$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{g_1g_2Y_2}}&<\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_1\sqrt{Y_1}}+\frac{2\sqrt{6a-8}\cdot6}{3.83(6a-8)\cdot6\sqrt{Y_2}}\\&<\frac{2\sqrt{6a-8}}{3.83\sqrt{a^2+1}Y_1\sqrt{Y_1}}+\frac{2}{3.83\sqrt{g_1g_2Y_2}}.\end{aligned}$$

因此

$$Y_2>\frac{4(a^2+1)}{(3a-4)g_1g_2}Y_1^3.$$

引理 10 得证. □

引理 11 设 $a\geq4$. 若 (X,Y) 为方程 (2) 的一组互素的正整数解, $Y^2=T_{2k}\pm(a-3)U_{2k}$, $k>1$, 则

(i) $k=2$ 时, $Y^2>4(6a+1)a^2$, 且

$$\begin{aligned}T_4-(a-3)U_4&=24a^3+4a^2+12a+1,\\T_4+(a-3)U_4&=16a^4-24a^3+12a^2-12a+1;\end{aligned}$$

(ii) $k=3$ 时, $Y^2>4(24a^3+4a^2+24a+3)a^2$, 且

$$\begin{aligned}T_6-(a-3)U_6&=96a^5+16a^4+96a^3+12a^2+18a+1,\\T_6+(a-3)U_6&=64a^6-96a^5+80a^4-96a^3+24a^2-18a+1;\end{aligned}$$

(iii) $k\geq 4$ 时, $Y^2>8(48a^5+8a^4+72a^3+10a^2+30a+3)a^2$, 且

$$T_8-(a-3)U_8=384a^7+64a^6+576a^5+80a^4+240a^3+24a^2+24a+1,$$
$$T_8+(a-3)U_8=256a^8-384a^7+448a^6-576a^5+240a^4-240a^3+40a^2-24a+1.$$

证明 首先, 我们有递推关系:

$$T_{2(k+1)}=(2a^2+1)T_{2k}+2a(a^2+1)U_{2k},\quad U_{2(k+1)}=2aT_{2k}+(2a^2+1)U_{2k}. \tag{25}$$

(i) $k=2$ 时, 由 $T_4+U_4\sqrt{a^2+1}=(a+\sqrt{a^2+1})^4$ 可得

$$T_4=8a^4+8a^2+1,\quad U_4=8a^3+4a.$$

此时

$$T_4-(a-3)U_4=24a^3+4a^2+12a+1>4(6a+1)a^2,$$
$$T_4+(a-3)U_4=16a^4-24a^3+12a^2-12a+1>T_4-(a-3)U_4.$$

故 $Y^2>4(6a+1)a^2$.

(ii) $k=3$ 时, 由 (25) 式可得

$$T_6=32a^6+48a^4+18a^2+1,\quad U_6=32a^5+32a^3+6a.$$

此时

$$T_6-(a-3)U_6=96a^5+16a^4+96a^3+12a^2+18a+1>4(24a^3+4a^2+24a+3)a^2,$$
$$T_6+(a-3)U_6=64a^6-96a^5+80a^4-96a^3+24a^2-18a+1>T_6-(a-3)U_6.$$

故 $Y^2>4(24a^3+4a^2+24a+3)a^2$.

(iii) $k\geq 4$ 时, 由 (25) 式可得

$$T_8=128a^8+256a^6+160a^4+32a^2+1,\quad U_8=128a^7+192a^5+80a^3+8a.$$

此时

$$\begin{aligned}T_{2k}-(a-3)U_{2k}&\geq T_8-(a-3)U_8\\&=384a^7+64a^6+576a^5+80a^4+240a^3+24a^2+24a+1\\&>8(48a^5+8a^4+72a^3+10a^2+30a+3)a^2,\\T_{2k}+(a-3)U_{2k}&\geq T_8+(a-3)U_8\\&=256a^8-384a^7+448a^6-576a^5+240a^4-240a^3+40a^2-24a+1\\&>T_8-(a-3)U_8.\end{aligned}$$

故 $Y^2>8(48a^5+8a^4+72a^3+10a^2+30a+3)a^2$. 引理 11 得证. □

引理 12 若 (X_j,Y_j) $(j=1,2,3)$ 为方程 (2) 满足

$$Y_j^2=T_{2k_j}\pm(a-3)U_{2k_j},\quad k_j>1$$

的 3 组互素的正整数解, 则存在 2 组互素的正整数解, 不妨设为 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), $Y_2 > Y_1$, 使得 $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \pm 1$, 且

$$Y_2 < \frac{1745(3a-4)^3 g_1^3 g_2^3}{a^2+1} Y_1^3.$$

这里 $k_j = 2$ 时, $a \geq 12$; $k_j \geq 3$ 时, $a \geq 5$.

证明 由引理 10 的推理过程知, 存在方程 (2) 的 2 组互素的正整数解 (X_j, Y_j) $(j = 1, 2)$, $Y_2 > Y_1$, 使得 $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \pm 1$, $Y_1^2 = T_{2k} \pm (a-3)U_{2k}$, $k > 1$. 根据引理 8, 可得

$$\begin{aligned} &\pm X_j \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i} = \frac{1}{4g_j^2}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j \pm y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4, \\ &x_j^2 + 2(3a-4)y_j^2 = 2g_jY_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

我们只讨论以下情形:

$$\begin{aligned} &X_j \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i} = \frac{1}{4g_j^2}(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j + y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4, \\ &x_j^2 + 2(3a-4)y_j^2 = 2g_jY_j, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{26}$$

其他情形类似. 此时有

$$\begin{aligned} &(a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j + y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4 - (a-3-\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_j - y_j\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4 \\ &\quad = \pm 8g_j^2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

由 (26) 式可知

$$\begin{aligned} &(X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4(x_2 + y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4 \\ &\quad - (X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4(x_2 - y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4 \\ &\quad = \pm 32(g_1g_2)^2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}Y_1^4. \end{aligned} \tag{27}$$

记 $2u + 2v\sqrt{6a-8}\mathrm{i} = (x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2 + y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})$, 则 (27) 式成为

$$|(X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4 - (X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4| = 2(g_1g_2)^2\sqrt{6a-8}Y_1^4. \tag{28}$$

令 $A = X_1$, $B = \pm 1$, $D = 6a-8$, 以及

$$\begin{aligned} &w = \frac{X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i}}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{X_1^2 + 6a - 8} + X_1, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{X_1^2 + 6a - 8} - X_1, \\ &w_1 = 2\mathrm{e}^{0.99}\varepsilon_1, \quad w_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2.37}\varepsilon_2. \end{aligned}$$

由引理 10 及 $X_1^2 - (a^2+1)Y_1^4 = 8 - 6a$ 可知

$$\frac{|\pm\sqrt{6a-8}(u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i})|}{2X_1} = \frac{\sqrt{(6a-8)g_1g_2Y_1Y_2}}{2X_1} > \frac{2\sqrt{2(a^2+1)Y_1^4}}{2\sqrt{a^2+1}Y_1^2} > 1.$$

根据引理 1 (i) 可令 $C_1 = 1$. 由引理 11 知, 若 $k_j = 2$, 则当 $a \geq 12$ 时,

$$\varepsilon_1 > 2X_1 > 48a^4 \geq 48 \times 144a^2 = 6912a^2 \geq 995328.$$

若 $k_j\geq 3$, 则当 $a\geq 5$ 时,

$$\varepsilon_1>2X_1>192a^6\geq 3\times 10^6>995328.$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda&<\left|\frac{1.684+\log\varepsilon_1}{1.676+\log\varepsilon_2}\right|=\frac{1.684+\log\varepsilon_1}{\log\varepsilon_1-\log(6a-8)-1.676}\\&<\frac{1.684+\log\varepsilon_1}{0.685\log\varepsilon_1-1.676}=1.46+\frac{4.131}{0.685\log\varepsilon_1-1.676}<2.\end{aligned}$$

可取 $\lambda=2$. 又 $\frac{w_1-w_2}{w_1-1}>1$, 即 $f>\frac{0.5\sqrt{6a-8}}{X_1}$. 取 $f=\frac{0.501\sqrt{6a-8}}{X_1}$, 此时

$$\begin{aligned}C&=0.9w_1(w_1-w_2)|f|\lambda<0.9(2\mathrm{e}^{0.99}\varepsilon_1)^2\left(\frac{0.501\sqrt{6a-8}}{X_1}\right)^2\\&<0.9(2\mathrm{e}^{0.99}\times 2.1X_1)^2\left(\frac{0.501\sqrt{6a-8}}{X_1}\right)^2<28.862(6a-8).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}1-w_2&=1-\frac{\mathrm{e}^{2.37}(\sqrt{X_1^2+6a-8}-X_1)}{2}=1-\frac{\mathrm{e}^{2.37}(6a-8)}{2\varepsilon_1}\\&>1-\frac{\mathrm{e}^{2.37}\cdot 6a}{2\times 6912\times 12a}>0.999613,\end{aligned}$$

故有

$$\left|\eta w^{\frac14}-\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|>\frac{1-w_2}{C(g_1g_2Y_1Y_2)^{\frac32}}>\frac{1}{28.873(6a-8)(g_1g_2Y_1Y_2)^{\frac32}}. \tag{29}$$

此外, 由 (28) 式和引理 11, 有

$$\begin{aligned}\left|w-\left(\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right)^4\right|&=\frac{2(g_1g_2)^2\sqrt{6a-8}Y_1^4}{\sqrt{X_1^2+6a-8}(g_1g_2Y_1Y_2)^2}\\&=\frac{2\sqrt{6a-8}Y_1^2}{\sqrt{a^2+1}Y_1^2Y_2^2}=\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}Y_2^2}\\&<\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}\cdot 4(6a+1)a^2}<\frac{1}{31645}.\end{aligned} \tag{30}$$

令 $\zeta_1\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, 使得

$$\left|w^{\frac14}-\zeta_1\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|=\min_{0\leq k\leq 3}\left|w^{\frac14}-\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{2}}\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<\left(\frac{1}{31645}\right)^{\frac14}<0.075.$$

记 $\rho=\frac{a-3-\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}$. 由引理 10 的证明知

$$\begin{aligned}&\left|\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&\quad\leq\left|\rho^{\frac14}-\eta_1\frac{x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|+\left|\rho^{\frac14}-\eta_2\frac{x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&\quad<0.0223+0.0223<0.045.\end{aligned}$$

因此

$$\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\cdot\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-1\right|=\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\cdot\frac{(x_1+y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2-y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})}{(x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})}-1\right|<0.045.$$

由引理 11 知

$$|w^{\frac14}-1|=\left|\frac{\pm2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{X_1\mp\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|<2\sqrt{\frac{6a-8}{(3456a)^2+6a-8}}<0.000386,$$

故

$$\left|w^{\frac14}-\frac{\eta_1}{\eta_2}\cdot\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\le|w^{\frac14}-1|+\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\cdot\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}-1\right|<0.0454.$$

若 $\zeta\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, $\zeta\ne\zeta_1$, $\zeta_1=\frac{\eta_1}{\eta_2}=\pm1$, 则

$$\begin{aligned}\left|w^{\frac14}-\zeta\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|&=\left|w^{\frac14}-\zeta_1\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}+(\zeta_1-\zeta)\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&>\left|(\zeta_1-\zeta)\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|-\left|w^{\frac14}-\zeta_1\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&>\sqrt2-0.075>1.\end{aligned}$$

依据与引理 10 类似的方法处理可得

$$\begin{aligned}\left|w-\left(\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right)^4\right|&\ge(2-0.0124)(\sqrt2-0.0124)^2\left|w^{\frac14}-\zeta_1\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|\\&\ge3.91\left|w^{\frac14}-\zeta_1\frac{u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}{u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}}\right|.\end{aligned}\tag{31}$$

结合 (29)–(31) 式, 我们有

$$\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}Y_2^2}>\frac{3.91}{28.873(6a-8)(g_1g_2Y_1Y_2)^{\frac32}},$$

即

$$Y_2<\frac{1745(3a-4)^3g_1^3g_2^3}{a^2+1}Y_1^3.$$

引理 12 得证. □

3 定理的证明

(i) 当 $a=1$ 时, 方程 (2) 成为

$$X^2-2Y^4=2.\tag{32}$$

易知, $2\mid X$. 令 $X=2X_1$, 则得 $Y^4-2X_1^2=-1$. 由引理 2 知该方程仅有正整数解 $(X_1,Y)=(1,1)$, 从而方程 (32) 仅有正整数解 $(X,Y)=(2,1)$.

(ii) 当 $a=2$ 时, 方程 (2) 成为

$$X^2-5Y^4=-4.\tag{33}$$

由文 [7] 知, 方程 (33) 仅有正整数解 $(X,Y)=(1,1)$.

(iii) 当 $a=3$ 时, 方程 (2) 成为

$$X^2-10Y^4=-10. \tag{34}$$

易知, $10\,|\,X$. 令 $X=10X_1$, 则得 $Y^4-10X_1^2=1$. 由引理 3 知该方程无正整数解, 从而方程 (34) 无正整数解.

(iv) 当 $a=4$ 时, 方程 (2) 成为

$$X^2-17Y^4=-16. \tag{35}$$

由文 [10] 知, 方程 (35) 仅有正整数解 $(X,Y)=(1,1)$ 和 $(103,5)$.

(v) 当 $a\geq 5$ 时, 假定 (X_j,Y_j) $(j=1,2,3)$ 为方程 (2) 的 3 组互素的正整数解, 满足

$$Y_j^2=T_{2k_j}\pm(a-3)U_{2k_j},\quad k_j>1.$$

由引理 10 知, 存在 2 组互素的正整数解, 不失一般性, 设为 (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), $Y_2>Y_1$, 使得 $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\pm1$, 且 $Y_1^2=T_{2k}\pm(a-3)U_{2k}, k>1$. 若得出矛盾, 则意味着方程 (2) 最多有 2 组互素的正整数解满足 $k>1$.

由 $Y_1(w)=F(-\frac{5}{4},-1,\frac{3}{4},w)=1+\frac{5w}{3}$, $X_1(w)=wY_1(w^{-1})=w+\frac{5}{3}$, $\Delta_{4,1}=3$ 以及 $N_{4,1}=8$ 知

$$B_{4,1}=4X_1\pm\sqrt{6a-8}\mathrm{i},\quad A_{4,1}=4X_1\mp\sqrt{6a-8}\mathrm{i}.$$

令 $q=u+v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}=\frac{(x_1-y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2+y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})}{2}$, $p=u-v\sqrt{6a-8}\mathrm{i}$, 并取 $C_1=1$, $f=\frac{0.501\sqrt{6a-8}}{X_1}$, 则 $|qf|>1$. 定义 r_0 为满足

$$w_2^{1-r_0}\leq|qf|<w_2^{-r_0}$$

的正整数. 我们分三种情形讨论.

情形 1 $r_0=1$ 及 $\zeta_1^{-1}qB_{4,1}\neq pA_{4,1}$. 此时由引理 1 (ii) 知

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}Y_2^2}&=\left|w-\left(\frac{p}{q}\right)^4\right|>3.91\left|w^{\frac{1}{4}}-\zeta_1\frac{p}{q}\right|\\&>\frac{3.91\times(1-0.8)}{0.9w_1\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}>\frac{3.91\times0.2}{0.9\times2\mathrm{e}^{0.99}\times2.1X_1\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}\\&>\frac{0.07687}{X_1\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}.\end{aligned}$$

因此

$$Y_2^3<\frac{1354(3a-4)g_1g_2}{a^2+1}Y_1X_1^2<1354(3a-4)g_1g_2Y_1^5.$$

由引理 10 知

$$Y_2^3>\left(\frac{4}{18}Y_1^3\right)^3=\frac{8}{729}Y_1^9,$$

故

$$Y_1^4 < 123383.25(3a-4)g_1g_2 < 2220898.5a^2,$$

从而 $Y_1^2 < 1491a$. 但当 $a \geq 8$ 时, 与引理 11 矛盾. 而当 $5 \leq a \leq 7$ 时, 将在后面一并讨论.

情形 2 $r_0 = 1$, $\eta q B_{4,1} = pA_{4,1}$ 以及 $\eta \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. 此时

$$\begin{aligned}&\eta(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2 + y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i})\\ &\quad = (4X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_2 - y_2\sqrt{6a-8}\mathrm{i}).\end{aligned}$$

令 $\gcd(X_1, 6a-8) = l$, 由 $\gcd(X_1, Y_1) = 1$ 知 $l \mid (a^2+1)$, 故 $l \mid 6(a^2+1) - a(6a-8) = 8a+6$, 从而 $l \mid 3(8a+6) - 4(6a-8) = 50$. 因此 $\gcd(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, 4X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i}) \mid 400$. 进而由

$$g_1^2(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i} \pm 3\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) = (a-3+\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4$$

知

$$\gcd(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) \mid 12, \quad 3 \nmid \gcd(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}).$$

于是有

$$(16X_1^2 + 6a - 8) \mid 4.8 \times 10^5(x_2^2 + (6a-8)y_2^2)$$

以及

$$\gcd(4X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) \mid 12, \quad 3 \nmid \gcd(4X_1 \mp \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}). \tag{36}$$

由 $\gcd(x_1 + y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) = \sqrt{2g_1}$ 和 (36) 式知

$$(x_1^2 + (6a-8)y_1^2) \mid 2400g_1(x_2^2 + (6a-8)y_2^2). \tag{37}$$

而由

$$g_1^2(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i} \mp 5\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) = (a-3-\sqrt{6a-8}\mathrm{i})(x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i})^4$$

知

$$\gcd(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}) \mid 20, \quad 5 \nmid \gcd(4X_1 \pm \sqrt{6a-8}\mathrm{i}, x_1 - y_1\sqrt{6a-8}\mathrm{i}). \tag{38}$$

结合 (36)–(38) 式, 我们有

$$(16X_1^2 + 6a - 8)(x_1^2 + (6a-8)y_1^2) \mid 2.4 \times 10^6 g_1(x_2^2 + (6a-8)y_2^2). \tag{39}$$

因此由 (39) 式及引理 11 可得

$$2.4 \times 10^6 g_1g_2Y_2 \geq (16X_1^2 + 6a - 8)g_1Y_1 > 15.9(a^2+1)g_1Y_1^5. \tag{40}$$

又由引理 1 (iii) 知

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{6a-8}}{\sqrt{a^2+1}Y_2^2} &> 3.91\left|w^{\frac{1}{4}} - \zeta_1\frac{p}{q}\right| > \frac{3.91 \times 0.999613}{0.9w_1^2\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}\\ &> \frac{3.91 \times 0.999613}{0.9(2\mathrm{e}^{0.99} \times 2.1X_1)^2\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}.\end{aligned}$$

于是

$$Y_2^3<\frac{6926(3a-4)g_1g_2}{a^2+1}Y_1X_1^4<6926(3a-4)g_1g_2(a^2+1)Y_1^9. \tag{41}$$

由 $g_1g_2<6a-8$, 并结合 (40)–(41) 式得

$$Y_1^2<18470334a^{-\frac{1}{6}},$$

但当 $a\geq 73$ 时, 与引理 11 矛盾. 而当 $5\leq a\leq 72$ 时, 将在后面一并讨论.

情形 3 $r_0>1$. 由 r_0 的定义知, $w_2|qf|\geq 1$, 故

$$\frac{\mathrm{e}^{2.37}(6a-8)\sqrt{g_1g_2Y_1Y_2}}{2(\sqrt{X_1^2+6a-8}+X_1)}\cdot\frac{0.501\sqrt{6a-8}}{X_1}\geq 1. \tag{42}$$

由 $X_1^2=(a^2+1)Y_1^4+8-6a>0.99999991(a^2+1)Y_1^4$ 及 (42) 式知

$$Y_2>\frac{(a^2+1)^2}{14.4(3a-4)^3g_1g_2}Y_1^7. \tag{43}$$

根据引理 12, 结合 (43) 式和 $g_1g_2<6a-8$, 可得

$$Y_1^2<154080a^2. \tag{44}$$

若 $k\geq 4$, 则由 $a\geq 5$ 知 $Y^2>1244800a^2$, 与 (44) 式矛盾, 于是 $k=2$ 或 3.

若 $k=3$, $5\leq a\leq 11$, 则可分别算出: $T_6-(a-3)U_6=23\cdot 107\cdot 131, 23\cdot 34283, 167\cdot 10093, 769\cdot 4241, 19\cdot 283\cdot 1087, 743\cdot 13267, 101\cdot 156679$; $T_6+(a-3)U_6=19\cdot 47\cdot 827, 11\cdot 211199, 6076267, 223\cdot 62383, 28800199, 379\cdot 145399, 98965219$. 它们皆非平方数, 故 $a\geq 12$. 此时 $Y^2>169356a^2$, 也与 (44) 式矛盾, 于是 $k=2$.

若 $k=2$, $5\leq a\leq 6420$, 则由 Maple 9.5 计算可知 $T_4\pm(a-3)U_4$ 皆非平方数, 故 $a\geq 6421$. 此时 $Y^2>154100a^2$, 仍与 (44) 式矛盾.

最后, 我们需要讨论 $k=1$ 的情形.

假定 $(X,Y)\neq(a-3,1)$ 为方程 (2) 的一组互素的正整数解满足 $Y^2=T_2\pm(a-3)U_2$, 则 $Y^2=2a^2+1\pm(a-3)\cdot 2a$, 故有 $Y^2=4a^2-6a+1$ 及 $Y^2=6a+1$. 前式不可能成立, 后式对应的 X 为 $X=6a^2+a+3$. 定理得证.

注 运用文中的方法还可以证明: 丢番图方程 $X^2-(a^2+1)Y^4=k^2-1-2ka$ 在一定条件下最多只有 2 组互素的正整数解. 限于篇幅, 将另文发表.

参考文献

[1] Akhtari, S., The Diophantine equation $aX^4-bY^2=1$, *J. Reine Angew. Math.*, 2009, 630: 33-57.

[2] Cao, Z.F., Introduction to Diophantine Equations, Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989, 287 (in Chinese).

[3] Dujella, A., Continued fractions and RSA with small secret exponent, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2004, 29: 101-112.

[4] Hua, L.K., Introduction to Number Theory (Translated from Chinese by Peter Shiu), Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[5] Ke, Z. and Sun, Q., On the Diophantine Equations, Shanghai: Shanghai Education Press, 1980, 85 (in Chinese).
[6] Ljunggren, W., Zur Theorie der Gleichung $x^2+1=Dy^4$, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo I*, 1942, 5: 1-27 (in German).
[7] Ljunggren, W., On the Diophantine equation $Ax^4-By^2=C$ $(C=1,4)$, *Math. Scand.*, 1967, 21(2): 149-158.
[8] Luca, F. and Walsh, P.G., Squares in Lehmer sequences and some Diophantine equations, *Acta Arith.*, 2001, 100(1): 47-62.
[9] Luo, J.G. and Yuan, P.Z., Square-classes in Lehmer sequences having odd parameters and their applications, *Acta Arith.*, 2007, 127(1): 49-62.
[10] Stoll, M., Walsh, P.G. and Yuan, P.Z., On the Diophantine equation $X^2-(2^{2m}+1)Y^4=-2^{2m}$, *Acta Arith.*, 2009, 139(1): 57-63.
[11] Yuan, P.Z. and Li, Y., Squares in Lehmer sequences and the Diophantine equation $Ax^4-By^2=2$, *Acta Arith.*, 2009, 139(3): 275-302.
[12] Yuan, P.Z. and Zhang, Z.F., On the diophantine equation $X^2-(1+a^2)Y^4=-2a$, *Sci. China Math.*, 2010, 53(8): 2143-2158.
[13] Yuan, P.Z. and Zhang, Z.F., On the Diophantine equation $X^2-(a^2+4p^{2n})Y^4=-4p^{2n}$, *Acta Math. Sin., Chin. Ser.*, 2014, 57(2): 209-222 (in Chinese).

On the Diophantine Equation $X^2-(a^2+1)Y^4=8-6a$

GUAN Xungui

(*Taizhou University, Taizhou, Jiangsu, 225300, P. R. China*)

Abstract: Let a be a positive integer. In this paper, we prove that if $a=1$, then the equation $X^2-(a^2+1)Y^4=8-6a$ has only one positive integer solution $(X,Y)=(2,1)$; if $a=2$, then the equation has only one positive integer solution $(X,Y)=(1,1)$; if $a=3$, then the equation has no positive integer solution (X,Y); if $a=4$, then the equation has only two coprime positive integer solutions $(X,Y)=(1,1),(103,5)$; if $a\geq 5$ and $6a+1$ is a nonsquare positive integer, then the equation has at most three coprime positive integer solutions (X,Y); if $a\geq 5$ and $6a+1$ is a square, then the equation has at most four coprime positive integer solutions (X,Y).

Keywords: quartic equations; imaginary quadratic fields; Diophantine approximations; number of positive integer solutions; upper bound